



# CONCOURS

## Magistère de Développement Économique

### 1ère année

---

**Vendredi 11 Avril 2025**

**Durée : 2 heures**

**Documents et calculatrices non autorisés**

***Épreuve de Mathématiques-Statistiques***

Le sujet comporte **3 exercices** - 4 **pages** incluant la page d'identification + **2 tables statistiques**.  
Vous devez vérifier en début d'épreuve le nombre de pages de ce fascicule. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au surveillant.

**Ce sujet complet doit être obligatoirement remis dans votre copie à la fin de l'épreuve**  
**L'exercice 1 doit être complété directement sur ce sujet**

**Exercice 1 - Répondre directement sur cette feuille et mettre la feuille dans la copie**

Numéro de  
candidat :

-----

Dans cet exercice, veuillez cocher **une seule case** pour répondre à chaque question

Question 1/ Le discriminant de  $5x^2 + 3x - 1$  vaut (cocher une seule case) :

- ☐  $\Delta = b^2 + 4ac = 29$
- ☐  $\Delta = b^2 - 4ac = -11$
- ☐  $\Delta = b^2 - 4ac = 29$
- ☐  $\Delta = -b + 4ac = -23$
- ☐  $\Delta = b^2 + 4ac = -11$
- ☐ Je ne sais pas

Question 2/ On veut déterminer les racines de  $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ . Que peut-on dire des racines éventuelles de  $f$  (cocher une seule case) :

- ☐ il y a deux racines simples qui sont  $x = 3$  et  $x = -3$
- ☐ il y a deux racines simples qui sont  $x = 1$  et  $x = -3$
- ☐ il y a deux racines simples qui sont  $x = -1$  et  $x = 3$
- ☐ il n'y a pas de racines réelles car le discriminant est négatif
- ☐ il y a une racine double qui est  $x = 3$
- ☐ il y a une racine double qui est  $x = -3$
- ☐ Je ne sais pas

Question 3/ La dérivée première de la fonction exponentielle  $h(x) = \exp(3x^4 + 5)$  est donnée par (cocher une seule case) :

- ☐  $h'(x) = \exp(3x^4 + 5)$
- ☐  $h'(x) = 12x \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐  $h'(x) = 12x^3 \cdot \exp(12x^3)$
- ☐  $h'(x) = 12x^2 \cdot \exp(3x^4)$
- ☐  $h'(x) = 12x^3 \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐  $h'(x) = (12x^3 + 5) \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐  $h'(x) = (3x^4 + 5) \cdot \exp(12x^3)$
- ☐ Je ne sais pas

Question 4/ Soit deux événements A et B non vides, le connecteur « ET » se traduit par (cocher une seule case) :

- ☐ une réunion d'événements disjoints
- ☐ une intersection d'événements
- ☐ une réunion d'événements non nécessairement disjoints
- ☐ Je ne sais pas

Question 5/ Si deux événements A et B, non vides, sont **incompatibles**, alors (cocher une seule case) :

- ☐ A et B ne sont jamais indépendants
- ☐ A et B peuvent être indépendants
- ☐ A et B sont toujours indépendants
- ☐ Je ne sais pas

Numéro de  
candidat :

-----

Question 6/ Soit  $(X; Y)$  un vecteur aléatoire discret pour lequel  $X$  prend les valeurs  $a_i$  où  $(1 \leq i \leq n_X)$  et  $Y$  prend les valeurs  $b_j$  avec  $(1 \leq j \leq n_Y)$ . Parmi les définitions suivantes, laquelle est vraie pour la **loi jointe du vecteur aléatoire  $(X; Y)$**  ? (cocher une seule case) :

- ☐ la loi jointe est donnée par les observations successives de  $X$  et de  $Y$  :  $P(\{X = a_i\})$  sachant  $\{Y = b_j\}$
- ☐ la loi jointe est donnée par les intersections provenant de  $X$  et de  $Y$  :  $P[\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}]$
- ☐ la loi jointe est donnée par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> composante séparément :  $P(\{X = a_i\})$  et  $P(\{Y = b_j\})$
- ☐ Je ne sais pas

Question 7/ Une boîte contient 12 jetons, numérotés de 6 à 17. On pioche au hasard 3 jetons. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **entièrement** correcte ? (cocher une seule case) :

- ☐ Si on pioche simultanément les jetons, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est une combinaison
- ☐ Si on pioche simultanément les jetons, c'est "non ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une liste
- ☐ Si on pioche chaque jeton puis on le replace dans la boîte et on mélange avant de piocher le suivant, et on note l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est un arrangement
- ☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le suivant, et on note l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une combinaison
- ☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le suivant, et on ne note pas l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est un arrangement
- ☐ Je ne sais pas

Question 8/ Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la covariance est non nulle :  $cov(X; Y) \neq 0$ , alors (cocher une seule case) :

- ☐ ces deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont toujours indépendantes
- ☐ ces deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  peuvent être indépendantes
- ☐ ces deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes
- ☐ on ne peut pas conclure sur l'indépendance ou la non-indépendance de ses variables aléatoires
- ☐ Je ne sais pas

## **Exercice 2 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier votre raisonnement**

Dans les questions 1 et 2, **Donner l'espace d'appartenance de chaque matrice et du résultat (si il existe)**, puis :

Question 1 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exprimer si c'est possible  $A \times B$  **en posant le détail des calculs**

Question 2 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exprimer si c'est possible  $B \times A$  **en posant le détail des calculs**

Question 3 : Exprimer la méthode puis le résultat pour le calcul du déterminant  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Calculer le déterminant **en justifiant chaque étape**

## **Exercice 3 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier clairement les valeurs utilisées**

*(écrire la méthode avec les valeurs posées pour les calculs, on ne demande pas le résultat numérique final)*

Une marque décide de produire des confitures avec moins de sucre et une meilleure teneur en fruits. Cette marque propose alors à la vente une confiture de framboises avec 76% de fruits. Suite à cette commercialisation, la marque réalise une enquête de satisfaction auprès de sa clientèle. On interroge, indépendamment les unes des autres, les personnes qui ont acheté ce produit (la confiture de framboises).

Parmi les  $n$  personnes interrogées, **5% seulement déclarent avoir été déçues par le produit**. Soit  $X$  le nombre de personnes **qui ont apprécié** le produit, parmi  $n$  personnes interrogées au hasard et indépendamment les unes des autres.

Question 1/ Dans cette question, on interroge  **$n = 10$  personnes**

1.a/ Justifier la construction de la loi binomiale de la variable aléatoire  $X$

1.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la valeur numérique de la probabilité pour **que toutes les personnes parmi les 10 interrogées aient apprécié** le produit

1.c/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la/les valeurs numériques de la probabilité de l'événement « **au plus 3 d'entre elles ont été déçues** par le produit ».

Question 2/ Dans cette question, on interroge **60 personnes, on rappelle que  $E(Y) = 60 \times 0.05 = 3$**

2.a/ Justifier l'approximation de la loi binomiale de  $Y = (n - X)$  par une loi de Poisson de paramètre 3

2.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la valeur numérique de la probabilité qu'**exactement 5 personnes parmi 60** soient déçues par le produit

Question 3/ D'autre part, lors de l'achat du produit, les personnes concernées ont d'abord attendu à la caisse de leur magasin avant de repartir avec le produit. Le temps d'attente (exprimé en minutes) à cette caisse, avant l'achat du produit, est une variable aléatoire  $T$  dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0$$

$$f(t) = 3k \exp(-t) \quad \text{si } t > 0$$

3.a/ Prouver que le coefficient multiplicatif est  $k = \frac{1}{3}$  en détaillant votre raisonnement. En déduire la fonction de répartition de  $T$ .

3.b/ Exprimer la probabilité que le temps d'attente à la caisse soit de moins de 9 minutes ? (on ne demande pas le résultat numérique final)

# TABLES DE DISTRIBUTIONS DISCRETES

1/ Table de distribution binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :  $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

n	k	P									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	0,0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	0,0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	0,8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	0,1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	0,0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	0,0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	0,8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	0,1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	0,0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	0,0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0750	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	0,0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	0,7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	0,2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	0,0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	0,0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	0,0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	0,0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	0,7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	0,2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	0,0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	0,0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	0,0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	0,0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	0,6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	0,2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	0,0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	0,0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	0,0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	0,0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	0,0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	0,6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	0,2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	0,0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	0,0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	0,0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	0,0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	0,0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	0,6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	0,2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	0,0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	0,0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	0,0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	0,0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	0,0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	0,0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	0,5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	0,3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	0,0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	0,0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	0,0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	0,0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	0,0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	0,0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010

NOTE. — Les points placés au début des probabilités sont à remplacer par 0, Exemple : .9025 signifie 0,9025.

### 1/ Tables de loi de Poisson de paramètre $\lambda$ :

$$p(k, \lambda) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

[illegible]